

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 3: HÀM SỐ SỐ LƯỢNG GIÁC

ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = 2 + \cot x$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = -\sin x.$

B. $y = \cos x.$

C. $y = \cos x \sin x.$

D. $y = \sin x.$

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \frac{\tan x}{\sin x}.$

B. $y = \frac{\cot x}{\cos x}.$

C. $y = \cos x.$

D. $y = \sin^2 x.$

Câu 4: Cho các hàm số $y = \cos x, y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số chẵn?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 5: Trong các hàm số $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ có bao nhiêu hàm số có chu kỳ là 2π ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 6: Tập giá trị của hàm số $y = 2\sin x + 1$ bằng

A. $[-1; 1].$

B. $[-2; 2].$

C. $[-1; 3].$

D. $[-3; 1].$

Câu 7: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin 3x - 4$ lần lượt là

A. 7; 1.

B. 1; -4.

C. 3; -4.

D. -1; -7.

Câu 8: Giá trị bé nhất của hàm số $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ là

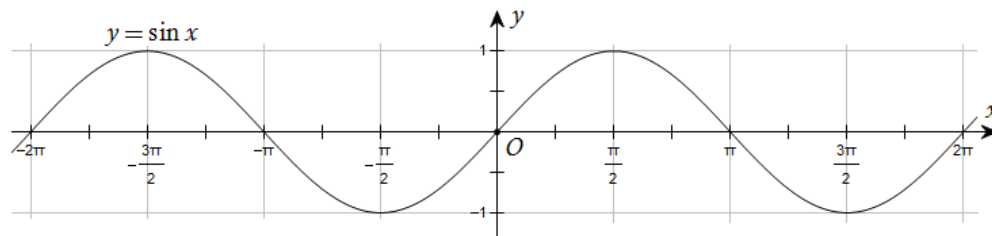
A. 5.

B. 2.

C. 1.

D. -1.

Câu 9: Dựa vào đồ thị đã vẽ, chọn khẳng định đúng về hàm số $y = \sin x$



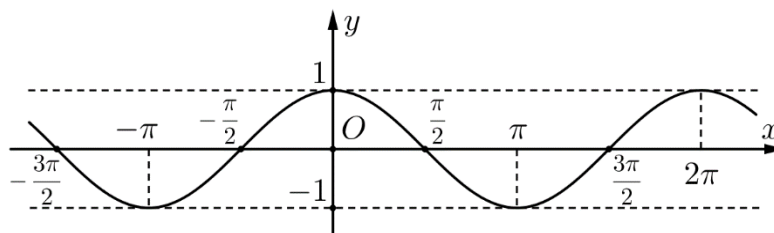
A. Đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right).$

B. Nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right).$

C. Đồng biến trên khoảng $(-\pi; \pi).$

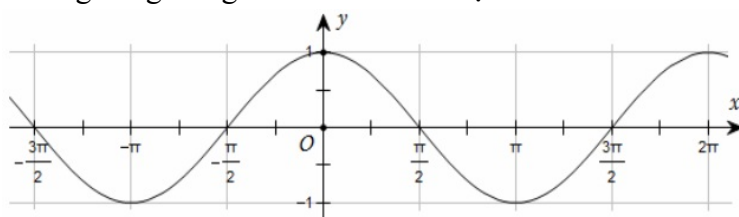
D. Nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

Câu 10: Xét hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$. Khẳng định nào sau đây là sai?



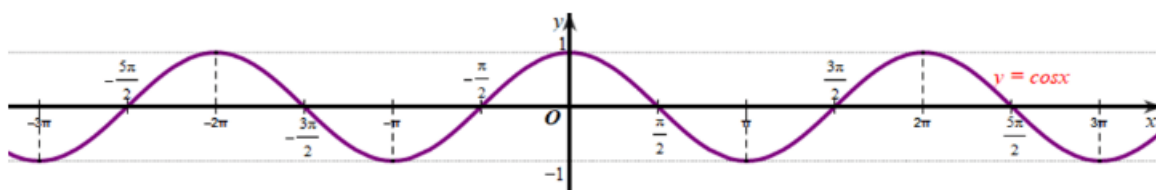
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\pi; 0)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Câu 11: Đường cong trong hình dưới là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây?



- A. $y = 1 + \sin 2x$.
- B. $y = \cos x$.
- C. $y = -\sin x$.
- D. $y = -\cos x$.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị của x trên đoạn $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0.



- A. 4.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 5.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- a) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$
- b) $f(-\pi) = -f(\pi)$
- c) $f(-x) = f(x)$
- d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn

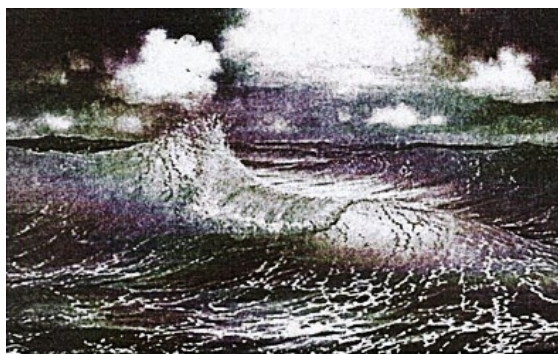
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \cos 2x + \cos x$.

- a) Tập xác định của hàm số trên là $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số trên là hàm số chẵn.
- c) Đặt $t = \cos x$ thì hàm số trở thành $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$.
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là -1 .

Câu 3: Cho hàm số $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$.

- a) Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 12\pi$.
- c) Hàm số là hàm số lẻ.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số là 13.

Câu 4: Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi con sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.



- a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 cm.
- b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 cm
- c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây
- d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

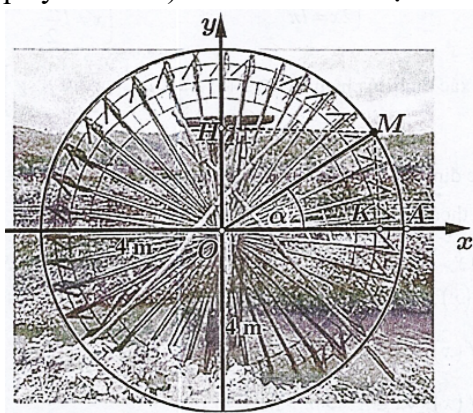
Câu 1: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 10a - 2b$?

Câu 2: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x + 4}$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 11(a + b)$?

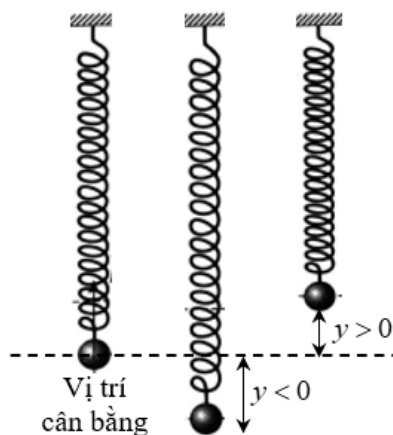
Câu 3: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}$, $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Câu 4: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi t bằng bao nhiêu?

- Câu 5:** Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O , bán kính là 4 m . Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O; 4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ). Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t = 0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



- Câu 6:** Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25\sin 4\pi t$ ở đó y được tính bằng centimet còn thời gian t được tính bằng giây. Gọi a là chu kỳ dao động của con lắc lò xo; b (Hz) là tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây và c (cm) là khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc. Tính $a + b + c$



----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = 2 + \cot x$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Lời giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = -\sin x.$

B. $y = \cos x.$

C. $y = \cos x \sin x.$

D. $y = \sin x.$

Lời giải

Xét hàm số $y = \cos x$ có tập xác định $\mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$

Đặt $f(x) = \cos x$. Khi đó $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x).$

Do đó $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \frac{\tan x}{\sin x}.$

B. $y = \frac{\cot x}{\cos x}.$

C. $y = \cos x.$

D. $y = \sin^2 x.$

Lời giải

Ta có tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = \frac{\cot(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\cot x}{\cos x} = -f(x).$

Vậy hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ là hàm số lẻ.

Câu 4: Cho các hàm số $y = \cos x, y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số **chẵn**?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Ta có $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 5: Trong các hàm số $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ có bao nhiêu hàm số có chu kì là 2π ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chỉ có $y = \sin x, y = \cos x$ là hai hàm số có chu kì bằng 2π .

Câu 6: Tập giá trị của hàm số $y = 2\sin x + 1$ bằng

A. $[-1; 1].$

B. $[-2; 2].$

C. $[-1; 3].$

D. $[-3; 1].$

Lời giải

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2\sin x + 1 \leq 3$

Vậy tập giá trị của hàm số là $[-1; 3].$

Câu 7: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin 3x - 4$ lần lượt là

- A. 7;1. B. 1;-4. C. 3;-4. D. -1;-7.

Lời giải

Ta có $-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin 3x \leq 3 \Leftrightarrow -7 \leq 3\sin 3x - 4 \leq -1$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là -1 khi $\sin 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -7 khi $\sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 8: Giá trị bé nhất của hàm số $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ là

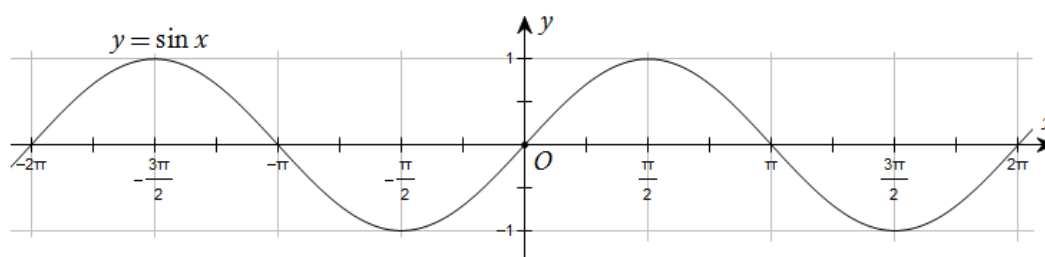
- A. 5. B. 2. C. 1. D. -1.

Lời giải

Ta có $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3$
 $\Leftrightarrow -1 \leq 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \leq 5$.

Vậy giá trị bé nhất của hàm số $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ là -1 .

Câu 9: Dựa vào đồ thị đã vẽ, chọn khẳng định đúng về hàm số $y = \sin x$

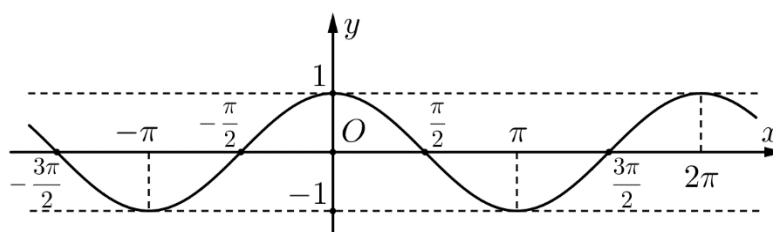


- A. Đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$. B. Nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.
 C. Đồng biến trên khoảng $(-\pi; \pi)$. D. Nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Từ đồ thị ta chọn ý B

Câu 10: Xét hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$. Khẳng định nào sau đây là sai?



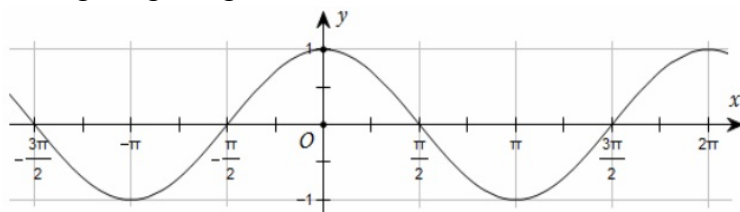
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\pi; 0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ và hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$, nên B sai.

Câu 11: Đường cong trong hình dưới là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây?



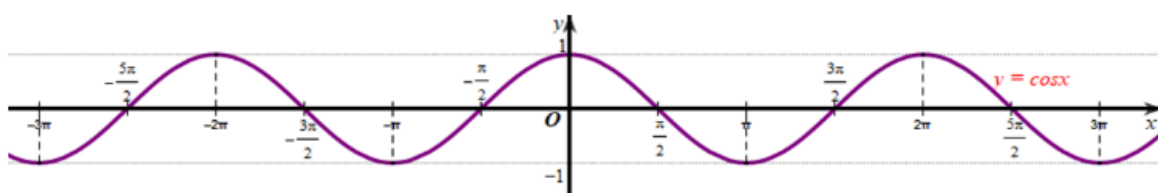
A. $y = 1 + \sin 2x$. B. $y = \cos x$. C. $y = -\sin x$. D. $y = -\cos x$.

Lời giải

+ Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 1)$ nên loại đáp án C, D

+ Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ nên loại đáp án A

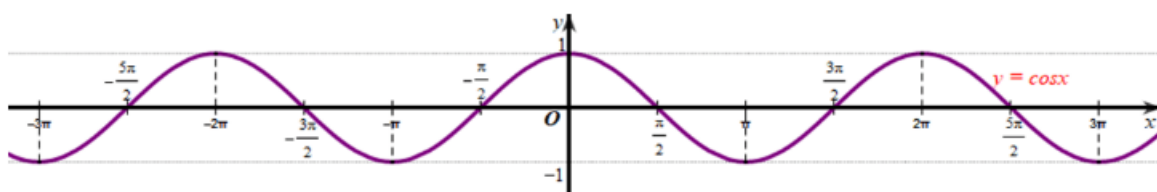
Câu 12: Có bao nhiêu giá trị của x trên đoạn $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0.



A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải

Ta có đồ thị hàm số $y = \cos x$:



Từ đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, ta thấy hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0

khi $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Vậy có 4 giá trị của x thỏa mãn bài toán.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

a) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$

b) $f(-\pi) = -f(\pi)$

c) $f(-x) = f(x)$

d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng: Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

b) Sai: Ta có $f(-\pi) = -2 \neq -f(\pi) = 2$

c) Đúng: Với mọi $x \in D$ ta có:

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = \sin^2(-x) + \cos(-x) - 1 = \sin^2 x + \cos x - 1 = f(x).$$

d) Đúng: Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \cos 2x + \cos x$.

a) Tập xác định của hàm số trên là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số trên là hàm số chẵn.

c) Đặt $t = \cos x$ thì hàm số trở thành $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là -1 .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng: Tập xác định của hàm số trên là $\mathbb{R}$.

b) Đúng: Hàm số trên là hàm số chẵn. Vì
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = \cos(-2x) + \cos(-x) = f(x) \end{cases}$$

c) Đúng: Đặt $t = \cos x$ thì hàm số trở thành $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$.

$$\text{Ta có } y = \cos 2x + \cos x; y = \cos 2x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1.$$

Đặt: $t = \cos x, t \in [-1; 1]$ khi đó $f(t) = 2t^2 + t - 1$.

d) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là 0 . Với hàm số $f(t) = 2t^2 + t - 1$ ở câu c:

Đồ thị của hàm số f là parabol có đỉnh $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$-\frac{1}{4}$	1
$f(t)$	0	$-\frac{9}{8}$	2

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m = \min_{[-1; 1]} f(t) = -\frac{9}{8}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$.

a) Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 12\pi$.

c) Hàm số là hàm số lẻ.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số là 13 .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng: Hàm số $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

b) Sai: Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$. Nên mệnh đề b sai.

c) Sai: Ta có $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có $y(x) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$ và $y(-x) = 2\cos\left(\frac{\pi(-x)}{6}\right) + 11 = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$.

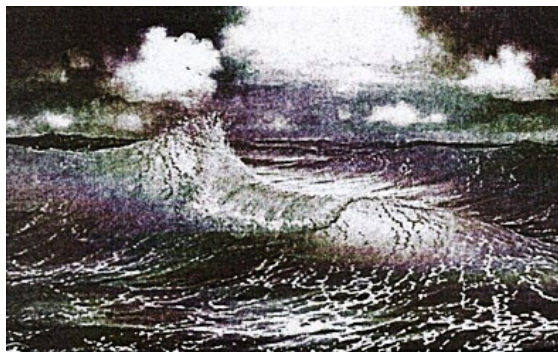
Vậy $y(x) = y(-x)$ nên hàm số $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$ là hàm số chẵn.

d) Đúng: Ta có $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$

Nên $-2 \leq 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 9 \leq 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11 \leq 13 \Leftrightarrow 9 \leq y \leq 13$.

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất bằng 13.

Câu 4: Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.



a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 cm.

b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 cm

c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây

d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng: Khi $t = 5$ ta có: $h(5) = 75\sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{8}\right) \approx 69,3$ cm.

b) Đúng: Khi $t = 20$ ta có: $h(20) = 75\sin\left(\frac{\pi \cdot 20}{8}\right) = 75$ cm.

c) Sai:

d) Sai: Ta có: $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1 \Rightarrow 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 75$ hay $h(t) \leq 75$.

Giá trị lớn nhất của $h(t)$ là 75 khi đó $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{8} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow t = 4 + 16k (k \in \mathbb{Z})$. Vì $t \in [0; 30] \Rightarrow t \in \{4; 20\}$ (ứng với k bằng 0 và 1).

Vậy tại các thời điểm 4 giây hoặc 20 giây (trong 30 giây đầu tiên) thì con sóng đạt chiều cao cực đại là 75 cm.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 10a - 2b$?

Lời giải

Trả lời: -8

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 2 = -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4$

Do $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4 \geq -(\sin x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4$.

Vậy giá trị của hàm số là $T = [0; 4]$ nên $\begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = 10a - 2b = 10 \cdot 0 - 2 \cdot 4 = -8$.

Câu 2: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x + 4}$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 11(a + b)$?

Lời giải

Trả lời: -8

Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x + 4} \Leftrightarrow y(\sin x + 2 \cos x + 4) = 2 \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow (y - 2) \sin x + (2y - 1) \cos x = -4y$.

Điều kiện để tồn tại cặp $(x; y)$ là $(y - 2)^2 + (2y - 1)^2 \geq (-4y)^2$

$\Leftrightarrow -11y^2 - 8y + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4 - \sqrt{71}}{11} \leq y \leq \frac{-4 + \sqrt{71}}{11}$.

Vậy miền giá trị hàm số là $T = \left[\frac{-4 - \sqrt{71}}{11}; \frac{-4 + \sqrt{71}}{11} \right]$ nên $P = 11(a + b) = -8$

Câu 3: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}$, $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Trả lời: 353

Ta có: $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] \geq -1 \quad \forall t \Rightarrow d(t) \geq 3 \cdot (-1) + 12 = 9$. Dấu "=" xảy ra khi:

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t-80 = -91 + 364k \Leftrightarrow t = -11 + 364k$$

$$\text{Mà } 0 < t \leq 365 \Rightarrow 0 < -11 + 364k \leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} < k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 353.$$

Vậy thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất vào ngày thứ 353 trong năm.

Câu 4: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi t bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 14

Mực nước của kênh cao nhất khi độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất.

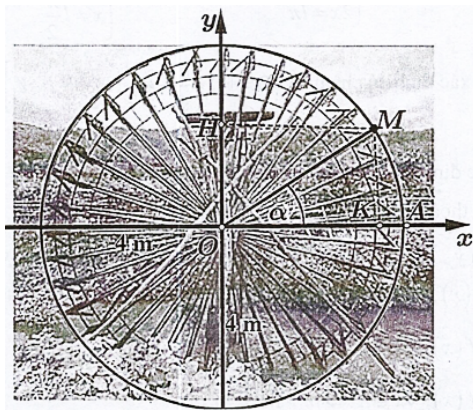
$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 9 \leq 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12 \leq 15.$$

$$\max h = 15 \text{ khi } \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 16k.$$

$$\text{Trong 1 ngày có 24 giờ nên } 0 \leq -2 + 16k \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq k \leq \frac{26}{16}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1 \Rightarrow t = 14$ giờ.

Câu 5: Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O , bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O; 4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ). Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t = 0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



Lời giải

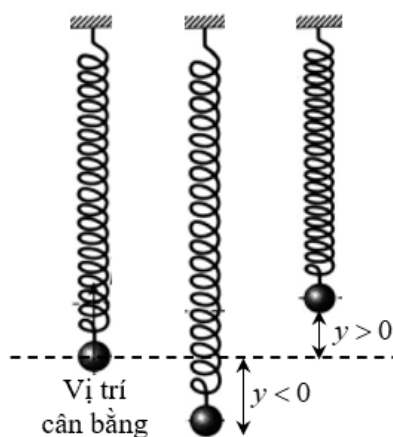
Trả lời: 10

$$\text{Ta có: } h(x) = 4 + 4\sin \alpha.$$

Khi M ở vị trí cao nhất so với mặt nước tức là $h(x) = 8$ thì $\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ (vì chỉ xét 1

vòng quay đầu tiên). Thời gian thực hiện của guồng nước là: $t = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 40}{2\pi} = 10$ (giây).

Câu 6: Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25\sin 4\pi t$ ở đó y được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây. Gọi a là chu kì dao động của con lắc lò xo; b (Hz) là tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây và c (cm) là khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc. Tính $a + b + c$



Lời giải

Trả lời: 52,5

Hàm số $y = 25\sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$ suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là $T = \frac{1}{2}$ giây nên $a = 0,5$.

Vì chu kì dao động của con lắc là $T = \frac{1}{2}$ giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là $b = f = \frac{1}{T} = 2$ Hz.

Vì phương trình dao động của con lắc là $y = 25\sin 4\pi t$ nên biên độ dao động của nó là $A = 25$ cm. Từ đó khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là $c = 2A = 50$ cm.

Vậy $a + b + c = 0,5 + 2 + 50 = 52,5$.

----- HẾT -----